Matemática

3.°

Formación General del Ciclo Orientado

Funciones cuadráticas con GeoGebra

Serie PROFUNDIZACIÓN · NES

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación e Innovación
María Soledad Acuña

Subsecretario de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología
Diego Javier Meiriño

Directora General de Planeamiento Educativo
María Constanza Ortiz

Subsecretario de Ciudad Inteligente y Tecnología Educativa
Santiago Andrés

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Subsecretario de Carrera Docente y Formación Técnica Profesional
Jorge Javier Tarulla

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología (SSPECT)

Dirección General de Planeamiento Educativo (DGPLEDU)
Gerencia Operativa de Currículum (GOC)
Javier Simón

Equipo de generalistas de Nivel Secundario: Bettina Bregman (coordinación), Cecilia Bernardi, Ana Campelo, Cecilia García, Julieta Jakubowicz, Marta Libedinsky, Carolina Lifschitz, Julieta Santos

Especialistas: Ruth Schaposchnik (coordinación), Carla Cabalcabué, Rosa María Escayola, Inés Zuccarelli

Equipo Editorial de Materiales Digitales (DGPLEDU)
Coordinación general de materiales digitales: Mariana Rodríguez
Coordinación editorial: Silvia Saucedo
Colaboración y gestión editorial: Manuela Luzzani Ovide

Edición y corrección: Bárbara Gomila
Corrección de estilo: Andrea Finocchiaro, Ana Premuzic
Diseño gráfico y desarrollo digital: Ignacio Cismondi

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Matemática : funciones cuadráticas con GeoGebra : 3 año. - 1a edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación, 2019.
Libro digital, PDF - (Profundización NES)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-673-511-7

1. Educación Secundaria. 2. Matemática. I. Título.
CDD 510.712

ISBN 978-987-673-511-7

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en Internet: 15 de agosto de 2019.

Presentación

La serie Profundización de la NES presenta distintas propuestas de enseñanza que ponen en juego los contenidos (conceptos, habilidades, capacidades, prácticas, valores y actitudes) definidos en el *Diseño Curricular* de la Formación General y la Formación Específica del Ciclo Orientado del Bachillerato de la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, en el marco de la Resolución N.° 321/MEGC/2015. Estos materiales despliegan, además, nuevas formas de organizar los espacios, los tiempos y las modalidades de enseñanza.

Las propuestas de esta serie se corresponden, por otra parte, con las características y las modalidades de trabajo pedagógico señaladas en el documento *Orientaciones para la Organización Pedagógica e Institucional de la Educación Obligatoria*, aprobado por la Resolución CFE N.° 93/09, que establece el propósito de fortalecer la organización y la propuesta educativa de las escuelas de nivel secundario de todo el país. A esta norma, actualmente vigente y retomada a nivel federal por la "Secundaria 2030", se agrega el documento *MOA – Marco de Organización de los Aprendizajes para la Educación Obligatoria Argentina*, aprobado por la Resolución CFE N.° 330/17, que plantea la necesidad de instalar distintos modos de apropiación de los saberes que den lugar a nuevas formas de enseñanza, de organización del trabajo docente y del uso de los recursos y los ambientes de aprendizaje. Se promueven también diversas modalidades de organización institucional, un uso flexible de los espacios y de los tiempos y nuevas formas de agrupamiento de las y los estudiantes, que se traduzcan en talleres, proyectos, articulación entre materias, experiencias formativas y debates, entre otras actividades, en las que participen estudiantes de diferentes años. En el ámbito de la Ciudad, el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* incorpora temáticas emergentes y abre la puerta para que en la escuela se traten problemáticas actuales de significatividad social y personal para la población joven.

Existe acuerdo sobre la magnitud de los cambios que demanda el nivel secundario para lograr incluir al conjunto de estudiantes, y promover los aprendizajes necesarios para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación activa en ámbitos laborales y de formación. Si bien se ha recorrido un importante camino en este sentido, es indispensable profundizar, extender e incorporar propuestas que hagan de la escuela un lugar convocante y que ofrezcan, además, reales oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, siguen siendo desafíos:

- Planificar y ofrecer experiencias de aprendizaje en formatos diversos.
- Propiciar el trabajo compartido entre docentes de una o diferentes áreas, que promueva la integración de contenidos.
- Elaborar propuestas que incorporen oportunidades para el aprendizaje y el desarrollo de capacidades.

Los materiales desarrollados están destinados a docentes y presentan sugerencias, criterios y aportes para la planificación y el despliegue de las tareas de enseñanza y de evaluación. Se incluyen también ejemplos de actividades y experiencias de aprendizaje para estudiantes. Las secuencias han sido diseñadas para admitir un uso flexible y versátil de acuerdo con las diferentes realidades y situaciones institucionales. Pueden asumir distintas funciones dentro de una propuesta de enseñanza: explicar, narrar, ilustrar, desarrollar, interrogar, ampliar y sistematizar los contenidos; así como ofrecer una primera aproximación a una temática, formular dudas e interrogantes, plantear un esquema conceptual a partir del cual profundizar, proponer actividades de exploración e indagación, facilitar oportunidades de revisión, contribuir a la integración y a la comprensión, habilitar instancias de aplicación en contextos novedosos e invitar a imaginar nuevos escenarios y desafíos. Esto supone que, en algunos casos, se podrá adoptar la secuencia completa, y, en otros, seleccionar las partes que se consideren más convenientes. Asimismo, se podrá plantear un trabajo de mayor articulación o exigencia de acuerdos entre docentes, puesto que serán los equipos de profesores y profesoras quienes elaborarán propuestas didácticas en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

En esta ocasión se presentan secuencias didácticas destinadas al Ciclo Orientado de la NES, que comprende la formación general y la formación específica que responde a cada una de las orientaciones adoptadas por la Ciudad. En continuidad con lo iniciado en el Ciclo Básico, la formación general se destina al conjunto de estudiantes, con independencia de cada orientación, y procura consolidar los saberes generales y conocimientos vinculados al ejercicio responsable, crítico e informado de la ciudadanía y al desarrollo integral de las personas. La formación específica, por su parte, comprende unidades diversificadas, como introducción progresiva a un campo de conocimientos y de prácticas específico para cada orientación. El valor de la apropiación de este tipo de conocimientos reside no solo en la aproximación a conceptos y principios propios de un campo del saber, sino también en el desarrollo de hábitos de pensamiento riguroso y formas de indagación y análisis aplicables a diversos contextos y situaciones.

Para cada orientación, la formación específica presenta los contenidos organizados en bloques y ejes. Los bloques constituyen un modo de sistematizar, organizar y agrupar los contenidos, que, a su vez, se recuperan y especifican en cada uno de los ejes. Las propuestas didácticas de esta serie abordan contenidos de uno o más bloques, e indican cuál de las alternativas curriculares propuestas en el diseño curricular vigente y definida institucionalmente resulta más apropiada para su desarrollo.

Los materiales presentados para el Ciclo Orientado dan continuidad a las secuencias didácticas desarrolladas para el Ciclo Básico. El lugar otorgado al abordaje de problemas complejos procura contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y de la argumentación desde perspectivas provenientes de distintas disciplinas. Se trata de propuestas alineadas con la formación de actores sociales conscientes de que las conductas colectivas e individuales tienen efectos en un mundo interdependiente. El énfasis puesto en el aprendizaje de capacidades responde a la necesidad de brindar experiencias y herramientas que permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y es fácilmente accesible para todas las personas. Las capacidades constituyen un tipo de contenidos que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Para ello, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades, de manera que las y los estudiantes las desarrollen y consoliden.

En esta serie de materiales también se retoman y profundizan estrategias de aprendizaje planteadas para el Ciclo Básico y se avanza en la propuesta de otras nuevas, que respondan a las características del Ciclo Orientado y de cada campo de conocimiento: instancias de investigación y de producción, desarrollo de argumentaciones fundamentadas, trabajo con fuentes diversas, elaboración de producciones de sistematización de lo realizado, lectura de textos de mayor complejidad, entre otras. Su abordaje requiere una mayor autonomía, así como la posibilidad de comprometerse en la toma de decisiones, pensar cursos de acción, diseñar y desarrollar proyectos.

Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento e instancias de reflexión sobre el propio aprendizaje, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión.

Continuamos el recorrido iniciado y confiamos en que constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad nuevas propuestas, que darán lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

María Constanza Ortiz
Directora General de Planeamiento Educativo

Javier Simón
Gerente Operativo de Currículum

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de la serie Profundización de la NES cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa Adobe Acrobat Reader que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.

Pie de página

Volver a vista anterior — Al cliquear regresa a la última página vista.

Ícono que permite imprimir.

« 5 » — Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Índice interactivo

Introducción

Plaquetas que indican los apartados principales de la propuesta.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Funciones cuadráticas con GeoGebra

Estudiar problemas sobre funciones cuadráticas del tipo $f(x)=a \cdot x^2+c$ con GeoGebra, haciendo énfasis en la relación entre los distintos registros de representación: tablas, gráficos y fórmulas.

Organizador interactivo que presenta la secuencia completa de actividades.

Notas al final

[1] Símbolo que indica una nota. Al cliquear se direcciona al listado final de notas.

Notas

[1] Ejemplo de nota al final.

Actividades

Atividade 1 **Funciones cuadráticas con GeoGebra**

En este problema van a trabajar con la función cuadrática $f(x)=x^2-4$ y su gráfica en el programa GeoGebra. Sigan las instrucciones que se indican a continuación.

Íconos y enlaces

El color azul y el subrayado indican un vínculo a un sitio/página web o a una actividad o anexo interno del documento.

Indica apartados con orientaciones para la evaluación.

Índice interactivo

Introducción

La siguiente secuencia está pensada para avanzar en el estudio de las funciones y ecuaciones cuadráticas. En particular, focaliza en el estudio de algunos casos en los que la expresión algebraica es incompleta. Se espera que los/las estudiantes, a la hora de abordar las actividades planteadas, hayan tenido algún contacto con la modelización mediante funciones cuadráticas, la producción de fórmulas y su representación gráfica[1]. No se pretende que estos conceptos estén completamente afianzados, sino que deberán ser retomados durante la secuencia y se consolidarán durante todo el aprendizaje futuro en la escuela secundaria. En particular, se busca la construcción de diferentes estrategias de resolución que no recurran necesariamente a la utilización de la fórmula resolvente (fórmula de Bhaskara). Se propone un trabajo que se apoye sobre los diversos conocimientos del grupo acerca de las funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a \cdot x^2+c$ y que, a la vez, posibilite un avance en relación con la resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas.

Esta secuencia se basa en la exploración en un entorno tecnológico —GeoGebra[2]— y en el análisis de la relación entre los distintos registros de representación: tablas, gráficos y fórmulas de estas funciones. La complejidad que implica la construcción de un entretejido de relaciones entre dichos registros da lugar a una progresiva conceptualización de las funciones y ecuaciones cuadráticas, y de sus respectivas características. Al mismo tiempo, este trabajo con el análisis de las funciones permite cargar de significado a las ecuaciones cuadráticas e interpretar las soluciones obtenidas.

A lo largo de la secuencia, se promueve el debate de ideas y la producción colectiva en torno al estudio y a la construcción de distintos registros de representación. De esta forma, es posible analizar que las variaciones de una expresión algebraica se ven plasmadas en el gráfico correspondiente al objeto matemático en cuestión. En particular, la exploración en la *Vista Gráfica* de GeoGebra habilita la elaboración de conjeturas en torno a estas relaciones. A su vez, este estudio propicia que el trabajo algebraico funcione como una herramienta posible para validar o descartar las conjeturas producidas en el entorno gráfico.

La incorporación de un recurso tecnológico implica el aprendizaje de una nueva herramienta, tanto para estudiantes como para docentes. Desde la perspectiva con la que se elabora esta propuesta, se considera que resolver algunas actividades sencillas permite un acercamiento inicial al funcionamiento y a las posibilidades de GeoGebra. Es decir que es posible aprender a utilizar el programa a medida que se resuelven problemas en este entorno. Estas herramientas serán un insumo valioso para el estudio de otros contenidos en matemática. Es importante destacar que no es necesario conocer todas las herramientas que incluye el programa para comenzar a utilizarlo. Por otro lado, no se espera que las/los estudiantes las encuentren por sí mismos, de ser preciso, sobre la base de sus intentos; el/la docente podrá mostrar el funcionamiento de una herramienta para ponerla en juego y luego habilitar que la utilicen a fin de resolver otros problemas.

A lo largo del documento se presentan, a modo orientativo, posibles estrategias y resoluciones de los/las estudiantes. Con estas anticipaciones, no se aspira a prever todo lo que sucederá efectivamente en la clase, sino a colaborar con la apropiación de un repertorio de criterios y propósitos que sirvan de ayuda en la selección de una intervención adecuada al diálogo específico que se produzca con los/las estudiantes. Es probable que el trabajo con GeoGebra en el aula dé lugar a un despliegue de alternativas de resolución mayor al que se da en otras situaciones de enseñanza, debido a la variedad de herramientas disponibles y a la facilidad de su utilización. Será importante que la/el docente habilite y estimule, en los estudiantes, la producción de estrategias propias y que dé espacio a ideas y propuestas, ya sean ajustadas o incompletas, en los espacios colectivos de discusión.

Los problemas presentados en este documento tienen la intención de involucrar al grupo de estudiantes en una actividad de producción matemática. Se busca que, con la intervención docente, puedan ensayar, equivocarse, desarrollar diferentes resoluciones, analizar estrategias desplegadas por sus compañeros y compañeras, y tomar una posición argumentada frente a ellas. Este tipo de trabajo matemático resulta enriquecedor, pero también complejo, por lo que no se espera que se logre de un día para el otro, ni con el transcurso de una única secuencia. Por otro lado, desde el enfoque didáctico que sostiene esta propuesta, se entiende que los enunciados presentan una complejidad particular, en tanto aluden a situaciones problemáticas nuevas. En este sentido, se espera que dichos enunciados puedan ser discutidos y consensuados en el colectivo de la clase junto con el/la docente a cargo.

En la primera actividad, se proponen cinco problemas a partir de distintos registros de representación —tablas, gráficos y fórmulas— y del uso de GeoGebra para la exploración y la anticipación de resultados. Además, se plantea un trabajo con parámetros asociados al término independiente y al coeficiente cuadrático, mediante el uso de deslizadores[3]. Esta herramienta de GeoGebra provee un modo accesible de introducir a las/los estudiantes en el manejo de variables parametrizadas.

Este sentido diferente que tienen los distintos tipos de variables suele ser muy complejo de atrapar y no se espera que quede resuelto con esta actividad. Se propone un avance progresivo hacia la resolución de ecuaciones cuadráticas, a partir del estudio de funciones de la forma $f(x)=a{\cdot}x^2+c$. De este modo, el tipo de tareas y las formas de ofrecer la información —análisis de tablas, fórmulas y gráficos— acompañarán este avance.

En la segunda actividad, se ofrecen dos problemas de síntesis con el objeto de sistematizar ciertas ideas y conceptos que serán la base para avanzar en la construcción de nuevos conocimientos sobre las funciones cuadráticas y la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Contenidos, objetivos de aprendizaje y capacidades

Ejes/Contenidos	Objetivos de aprendizaje	Capacidades
Funciones y álgebra *Función cuadrática* • La parábola como representación gráfica de funciones cuadráticas. • Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. • Uso de *software* de cálculo y representación para estudiar el comportamiento de funciones cuadráticas. • Problemas que se modelicen mediante ecuaciones cuadráticas. • Análisis de soluciones de la ecuación cuadrática.	• Modelizar y resolver situaciones problemáticas intramatemáticas que involucran: funciones y ecuaciones cuadráticas. • Establecer relaciones entre los tratamientos algebraicos, la representación gráfica y el contexto del problema que se está resolviendo en las diferentes modelizaciones.	• Resolución de problemas.

La exploración y el uso del programa GeoGebra permiten enriquecer el quehacer matemático a partir del trabajo entre los registros gráfico y algebraico. En particular, se busca que el grupo de estudiantes:

- Avance en el uso de herramientas de GeoGebra para explorar y relacionar los registros gráfico (*Vista Gráfica*) y algebraico (*Vista Algebraica*) de un mismo objeto matemático.
- Construya estrategias propias para el uso de deslizadores como parámetros en las fórmulas de las funciones cuadráticas que les permitan analizar de qué forma se modifican sus gráficas en función de la variación de estos parámetros.

Para quienes utilizan por primera vez GeoGebra, se recomienda la lectura del anexo "Funciones y ecuaciones con GeoGebra".

Itinerario de actividades

Actividad 1

Funciones cuadráticas con GeoGebra

Estudiar problemas sobre funciones cuadráticas del tipo $f(x)=a \cdot x^2+c$ con GeoGebra, haciendo énfasis en la relación entre los distintos registros de representación: tablas, gráficos y fórmulas.

Actividad 2

Problemas de síntesis

Analizar y reflexionar sobre el trabajo realizado a lo largo de la secuencia.

Orientaciones didácticas y actividades

A continuación, se presentan las actividades sugeridas para el grupo de estudiantes, acompañadas de orientaciones para docentes. En cuanto a la implementación de esta propuesta, se puede trabajar individualmente, en parejas o en pequeños grupos.

Cabe destacar que la resolución de las actividades en parejas o en pequeños grupos enriquece el proceso de aprendizaje, ya que promueve interacciones entre pares en las que se hace necesario explicitar y validar las decisiones tomadas. Además, en los momentos que la/el docente lo crea necesario, se podrá intervenir para desarrollar una discusión colectiva.

Actividad 1. Funciones cuadráticas con GeoGebra

Se abordan problemas sobre funciones cuadráticas con GeoGebra, haciendo énfasis en la relación entre distintos registros de representación: tablas, gráficos y fórmulas.

Actividad 1 Funciones cuadráticas con GeoGebra

En las siguientes actividades, los problemas hacen referencia a diferentes comandos del programa GeoGebra. Para facilitar su identificación se muestran a continuación los íconos de las herramientas que se utilizarán:

Problema 1

En este problema van a trabajar con la función cuadrática $f(x)=x^2-4$ y su gráfica en el programa GeoGebra. Sigan las instrucciones que se indican a continuación.

- Abran el programa e ingresen, en la barra de *Entrada,* la fórmula de la función. Con la herramienta *Punto* hagan clic sobre la parábola. Quedará determinado un punto *A* que se mueve sobre la curva. Antes de continuar, guarden el archivo con el nombre *problema1.ggb*.

- Con la herramienta *Elige y Mueve* desplacen el punto *A* sobre la parábola y respondan las siguientes consignas. Anoten en sus carpetas cómo lo hicieron:

a. Cuando $A=(-1\ ;\ y)$, ¿cuál es el valor de *y*?

b. Determinen el valor de *x* cuando $A=(x\ ;\ 5)$.

c. Encuentren pares de puntos de la parábola que tengan el mismo valor de la coordenada *y*. ¿Cuántos pares hay?

d. Completen, cuando sea posible, la siguiente tabla de manera tal que los puntos $(x\ ;\ y)$ pertenezcan a la parábola. En caso de no ser posible, expliquen por qué.

x	4	0			0,5	0,25					
y			0	21			10	−8			

Problema 2

En este problema van a trabajar en el programa GeoGebra con un conjunto de funciones cuadráticas que tienen algunas características en común. Sigan las instrucciones que se indican a continuación.

- Abran un nuevo archivo en GeoGebra. Luego, seleccionen la herramienta *Deslizador*, hagan clic sobre la *Vista Gráfica*: aparecerá un menú llamado *Deslizador*. Llámenlo *c*, hagan clic en *OK* y aparecerá definido con el nombre *c*.
- Ingresen en la barra de *Entrada* la siguiente fórmula: $f(x)=x^2+c$. Si desplazan el deslizador, podrán observar que, para cada valor de *c,* se obtiene una parábola diferente. Antes de continuar, guarden el archivo con el nombre *problema2.ggb*.

A continuación respondan las siguientes consignas:

a. En la siguiente tabla se dan como datos las coordenadas del vértice de distintas parábolas. Completen la siguiente tabla con los datos que faltan en cada función:

$f(x)=x^2+c$	*c*	**Coordenadas del vértice**
$f(x)=x^2+1$	1	(0 ; 1)
		(0 ; 4)
	0	
$f(x)=x^2-12$		

b. ¿Cuánto debe valer *c* para que el punto (*2* ; *6*) pertenezca al gráfico de la función?

c. Si $c=-2{,}5$ encuentren el o los valores de x o de y para que los siguientes puntos pertenezcan a la parábola:

- $A=(-1; y)$
- $B=(x; 13{,}5)$
- $C=(x; 97{,}5)$

d. ¿Será posible encontrar un valor de c de manera tal que el punto (1,5; 4) pertenezca a la función? Expliquen sus respuestas.

Problema 3

A continuación se presentan las fórmulas de tres funciones (f, g y h) y cinco gráficos (A, B, C, D y E). Decidan, para cada una de las fórmulas, cuál es el gráfico que la representa y expliquen por qué.

- $f(x)=2x^2-4$
- $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$
- $h(x)=-\frac{1}{4}x^2+1$

Gráfico A

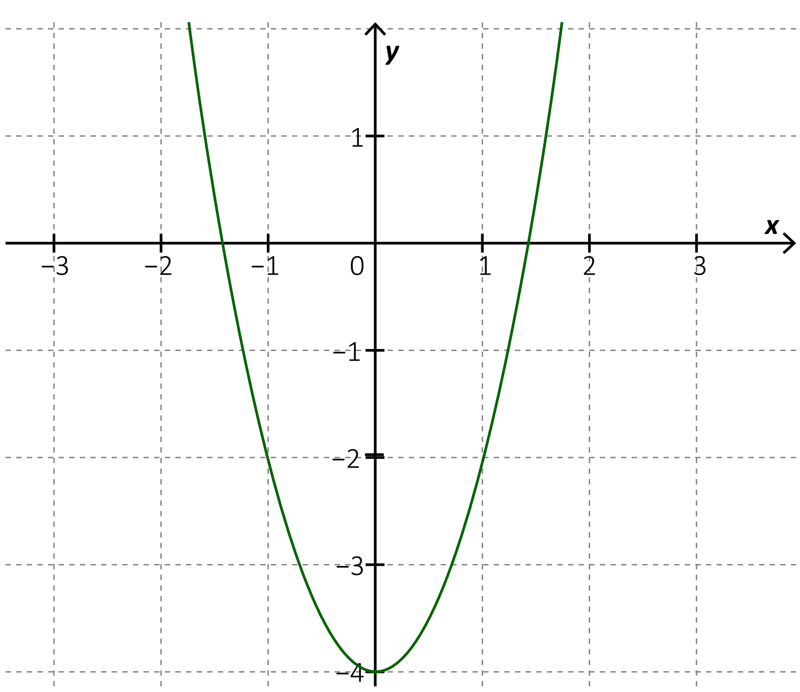


Gráfico B

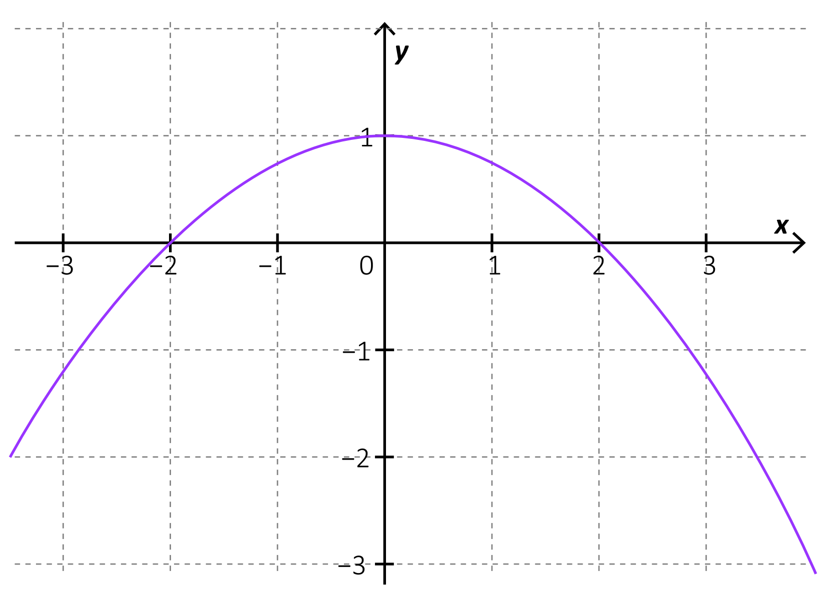


Gráfico C

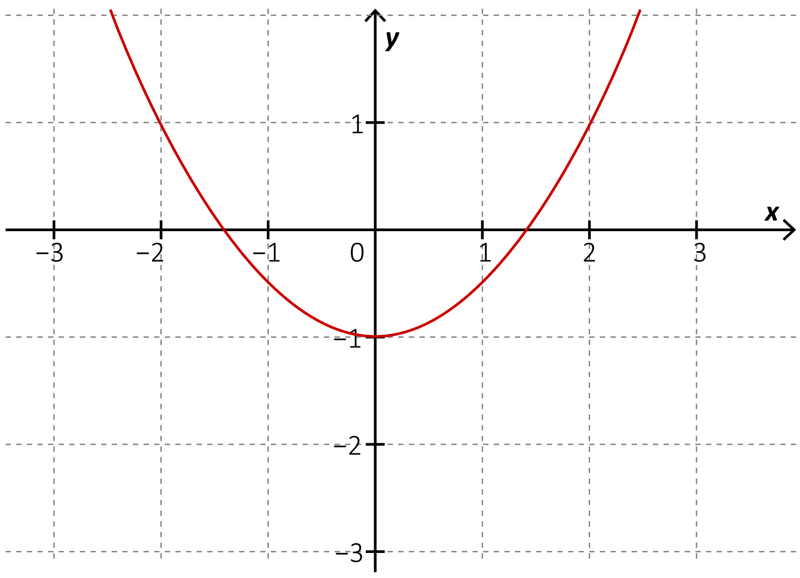


Gráfico D

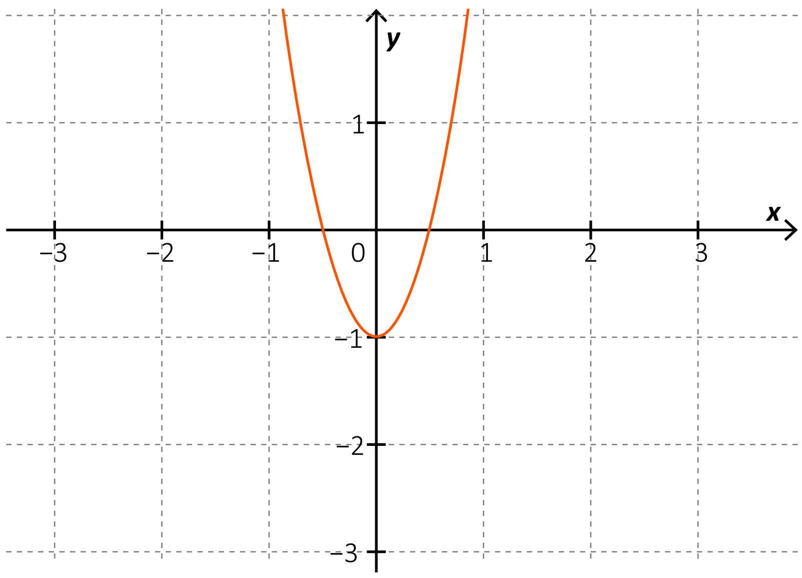
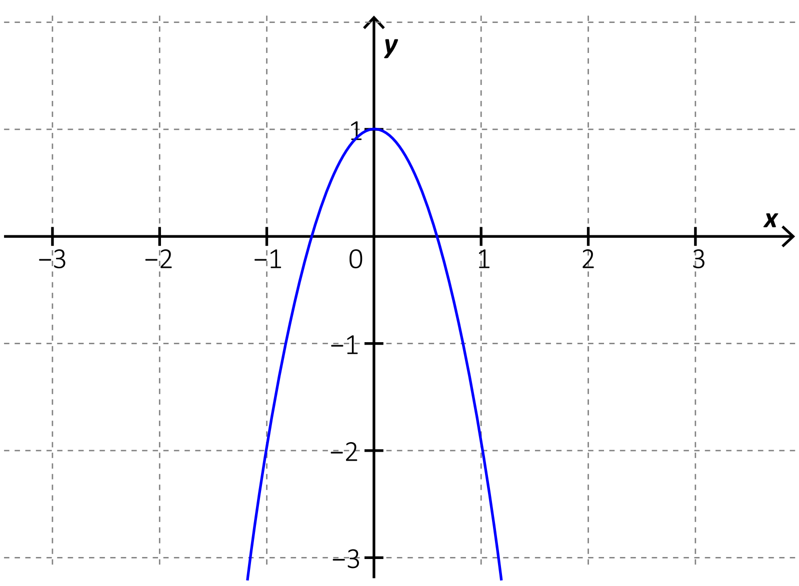


Gráfico E



Problema 4

En este problema trabajarán en el programa GeoGebra con un conjunto de funciones cuadráticas que tienen algunas características en común. Sigan las instrucciones que se indican a continuación:

- En un nuevo archivo de GeoGebra, creen un *Deslizador* de nombre *a*.
- Ingresen en la barra de Entrada la siguiente función: $f(x)=ax^2-5$. Al mover el deslizador, para cada valor de *a*, se obtiene una parábola diferente. Antes de continuar, guarden el archivo con el nombre *problema4.ggb*.

Respondan las siguientes consignas:

a. ¿Cuánto tiene que valer *a* para que el punto (2 ; 3) pertenezca al gráfico de la función obtenida?

b. ¿Será posible encontrar un valor de a para que el punto (1 ; 3) pertenezca al gráfico de la función obtenida? Si responden que sí, encuéntrenlo. Si responden que no, expliquen por qué.

c. ¿Cuánto tiene que valer a para que las raíces de la parábola obtenida sean −5 y 5? ¿Y −10 y 10?

d. Si colocan el deslizador en la posición a=0, podrán comprobar que la gráfica se transforma en una recta. ¿Pueden explicar por qué?

e. Usando la función que se obtiene cuando a=−3,5 encuentren un valor de x para que el punto (x; −19) pertenezca a la parábola. ¿Cuántos hay?

f. Usando la función que se obtiene cuando a=−7, encuentren dos valores distintos de x para que el punto (x; −180) pertenezca a la parábola.

Problema 5

a. A partir de la función $f(x)=-3x^2-2$, encuentren, si es posible, los valores de x para los cuales el punto (x; −14) pertenezca a la función. Si no es posible, expliquen por qué.

b. A partir de la función $f(x)=2x^2+7$, encuentren, si es posible, los valores de x para los cuales el punto (x; −2) pertenezca a la función. Si no es posible, expliquen por qué.

c. Para cada una de las siguientes funciones, encuentren su vértice, sus raíces (si las tiene) y realicen un gráfico aproximado.

- $f(x)=-x^2+5$
- $g(x)=\frac{1}{4}x^2-1$
- $h(x)=-2x^2+\frac{1}{2}$

Comentarios didácticos del Problema 1

Este problema apunta a que los/las estudiantes revisen nociones vinculadas a la función cuadrática y su gráfica. Se propone un trabajo inicial que se apoye en la exploración del gráfico en GeoGebra para luego avanzar hacia la resolución de ecuaciones. Si bien la resolución algebraica constituye la validación formal desde el punto de vista matemático, desde la perspectiva didáctica, la multiplicidad de abordajes del problema fortalece en los/las estudiantes la conceptualización porque pone en diálogo lo algebraico con lo gráfico. A su vez, esta multiplicidad propicia la autonomía en el trabajo matemático de los estudiantes, porque provee instancias de control de las resoluciones algebraicas.

En las consignas **a** y **b**, la intención es que las coordenadas de los puntos puedan obtenerse de manera directa en la lectura del gráfico, admitiendo como válido el uso de la cuadrícula, o de la lectura de las coordenadas del punto en la *Vista Algebraica*. Este tipo de lectura requiere ser comunicada al grupo, y su uso puede ser parte de las pautas de trabajo que cada docente establezca en el espacio del aula.

También es posible que recurran al uso de la fórmula. Es importante señalar que, tanto en este problema como en los siguientes, no se busca instalar una sola estrategia de resolución. Por el contrario, se promueve el despliegue de distintos procedimientos para luego establecer vínculos entre ellos y así enriquecer la discusión de las relaciones matemáticas involucradas en cada situación.

En particular, en la consigna **b**, existen dos valores de *x* a los que les corresponde el mismo valor de *y*. Será, entonces, una oportunidad para recordar —en el espacio colectivo— que dichos puntos son simétricos[4] dado que comparten el mismo valor de ordenada. En este sentido, la discusión de la consigna **c** tiene como propósito que las/los estudiantes puedan determinar que existe un único punto en la parábola que no tiene simétrico, cuya ordenada es −4, y es el vértice. Con la consigna **d** se apunta a analizar la relación entre los valores de la tabla de manera tal que los puntos pertenezcan a la parábola. A continuación, a modo de ejemplo, se describen algunas estrategias posibles para completarla:

- El punto (4 ; 12) puede obtenerse de la lectura directa del gráfico —moviendo la *Vista Gráfica* en GeoGebra— o de las coordenadas del punto en la *Vista Algebraica*.
- Para y=0 existen dos valores de x posibles: x=−2 o x=2. Estos fueron elegidos para revisar o recordar con las/los estudiantes la noción de raíz de una función. En este caso, pueden obtenerse tanto a partir de la lectura del gráfico como de la resolución de la ecuación $x^2-4=0$. Será interesante que, a partir del intercambio, se pueda instalar la importancia de conocer ambas estrategias, de modo que una pueda servir como control de los valores obtenidos a través de la otra.
- Para y=21, también existen dos valores de x (−5 o 5). Los mismos pueden obtenerse desplazando la *Vista Gráfica* con la herramienta *Desplaza Vista Gráfica* o a partir de las ecuaciones correspondientes.
- Para x=0,5 es posible obtener el valor de y=3,75 usando el *zoom* en GeoGebra. O bien, puede utilizarse la barra de *Entrada* como calculadora, para comprobar que g(0,5)=3,75.
- Es probable que la estrategia desplegada para x=0,5 vuelva a utilizarse para determinar el valor de ordenada correspondiente a x=0,25. En particular, el valor que se obtiene —por la *Vista Gráfica* o por el cálculo a través de la barra de *Entrada*— es un número aproximado: y=−3,94. Sin embargo, este valor no verifica la ecuación. Esto será una oportunidad para alentar al grupo de estudiantes a recurrir a la resolución algebraica.

- Para y=10, se podría realizar un recorrido similar al hecho con el punto anterior de la tabla y obtener, de manera aproximada, que x=−3,74 o x=3,74. Estos valores podrían ser reemplazados en la fórmula de la función —a modo de verificación— obteniendo, en ambos casos, y=9,99. El resultado es aproximado porque los valores exactos de x son números irracionales: no podrán ser atrapados con GeoGebra, sino con la resolución de la ecuación $x^2-4=10$.
- La columna correspondiente a y=−8 fue pensada con la intención de que pueda explorarse en GeoGebra, dado que la parábola no contiene ningún punto con y=−8. En este caso se apunta a discutir la resolución de la ecuación $x^2-4=-8$ para comprobar que no tiene solución.
- Los últimos tres pares de la tabla tienen la intención de que los/las estudiantes puedan completarlos con las coordenadas de puntos que pertenezcan a la parábola. Para ello pueden utilizar puntos del gráfico o la fórmula de la función, poniendo en diálogo ambos registros de representación. Será interesante también analizar que la cantidad de valores que pueden elegir para completar la tabla es infinita y alentarlos a convalidar o rebatir los valores elegidos por otros compañeros y compañeras.

En síntesis, a medida que se analizan las distintas columnas de la tabla, se espera que las/los estudiantes puedan desplegar estrategias como:

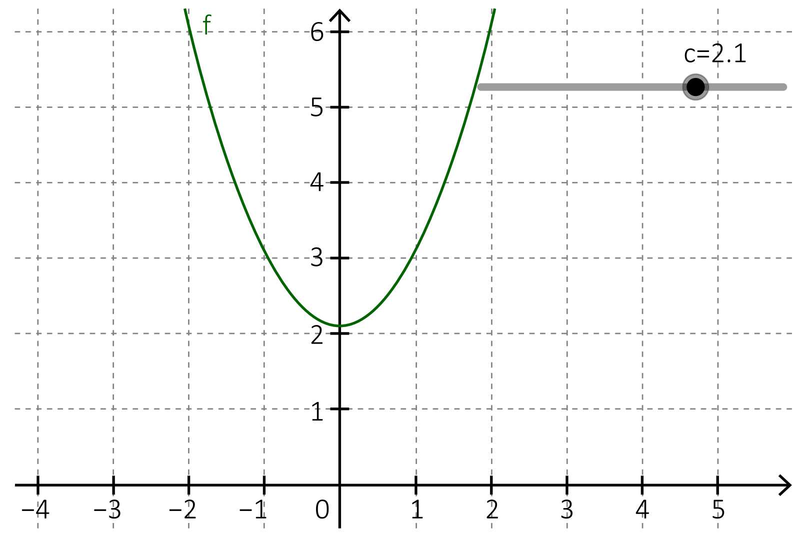
- Explorar el valor buscado en GeoGebra, tanto en la *Vista Gráfica* como en la *Vista Algebraica*.
- Utilizar la fórmula de la función, tanto para resolver ecuaciones como para verificar si un punto pertenece o no a su gráfica.
- Resolver la ecuación y verificar los valores obtenidos en GeoGebra, siempre que sea posible.

Comentarios didácticos del Problema 2

Este problema propone trabajar con un parámetro c asociado a la ordenada al origen de la función cuadrática cuya fórmula es $f(x)=x^2+c$, para estudiar la relación entre su gráfico y la ecuación que la describe. Además, se aborda el trabajo con la resolución de ecuaciones cuadráticas sencillas.

En la consigna **a**, al mover el deslizador, se podrá determinar, a partir del gráfico, que, para que el vértice esté en (0 ; 4), el valor de c debe ser 4, y para que el vértice esté en el origen de coordenadas, el deslizador debe valer 0. Es decir, el valor de c es el valor de la coordenada y del vértice. Será interesante analizar cómo puede ponerse en diálogo esta idea con la ecuación $f(x)=x^2+c$. En este caso, se trata de una familia de funciones cuadráticas que tienen el vértice sobre el eje y por lo que, al reemplazar x=0, se desprende que el punto (0 ; c) es el vértice de la parábola.

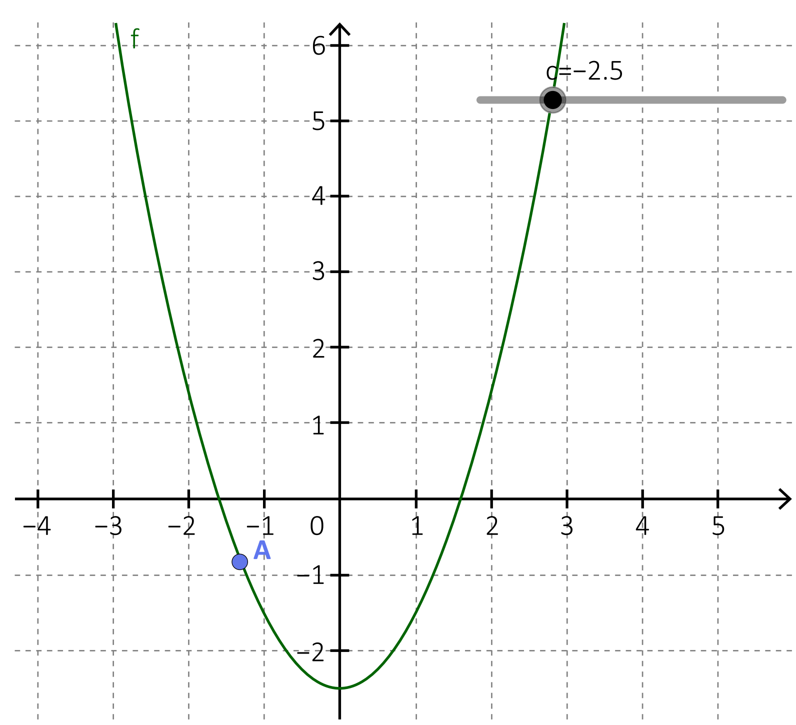
Para el caso del vértice en el punto (0 ; −12), por el rango predeterminado del deslizador, en principio, no es posible obtener la parábola pedida. Sin embargo, los/las estudiantes podrían modificar ese rango para responder a la pregunta o bien, podrán responder sin necesidad de apelar a GeoGebra.



Para responder a la consigna **b**, podrían mover el deslizador de modo de obtener una gráfica que contenga al punto (2 ; 6). Por otro lado, es posible que encuentren distintos valores de *c* cercanos a 2 que, a partir de la observación, parecieran cumplir con esta condición. En la imagen anterior se muestra la gráfica para $c = 2{,}1$.

Con la herramienta *Aproximar*, se puede descartar este valor. Otra posibilidad es que los/las estudiantes utilicen la ecuación para la validación. En este caso, como $f(2)=6$, el valor de *c* puede hallarse a partir de $2^2+c=6$, de donde se desprende que $c=2$.

En la consigna **c** se fija un valor del deslizador con la intención de comenzar a trabajar con ecuaciones cuadráticas sencillas del tipo $x^2+c=d$. Para el punto *A*, a partir del gráfico, puede obtenerse un valor aproximado de *y*, como se muestra en la imagen de la derecha.



Es decir, a partir de la observación podría estimarse que el punto *A* tiene coordenadas (−1 ; −1,5). Este valor puede ser validado o rechazado mediante la resolución de la ecuación $(-1)^2-2{,}5=y$. Otra opción es ingresar en la barra de *Entrada* de GeoGebra $f(-1)$ y obtener la imagen buscada.

Para el punto *B*, a partir de la *Vista Gráfica* puede establecerse que hay dos valores de x para los cuales $y=13,5$: $x=4$ y $x=-4$. Estos valores pueden ser validados a partir de la resolución de la ecuación $x^2-2,5=13,5$. Del mismo modo, puede trabajarse con el punto *C*. En este caso, la coordenada y del punto es mucho mayor con la intención de que los/las estudiantes recurran a la resolución de la ecuación. En todos los casos, los valores fueron elegidos para que puedan ser resueltos a través del cálculo mental.

Para el caso de la consigna **d**, no es posible establecer el valor exacto de c a partir del gráfico porque la configuración —por defecto— del deslizador admite una sola cifra decimal. De esta manera, se apunta a poner de relieve la necesidad de procedimientos formales que garanticen la exactitud. En una primera instancia, el gráfico permite ver que c debe estar entre 1,7 y 1,8. Este puede ser un buen punto de partida para usar la ecuación de manera de determinar que el valor exacto de c es 1,75.

Comentarios didácticos del Problema 3

Este problema tiene el objetivo de reutilizar y sistematizar el trabajo realizado en los problemas anteriores. No se espera avanzar en el análisis del valor del parámetro a en la fórmula $f(x)=ax^2+c$ de cada función sino que los/las estudiantes puedan identificar el gráfico de cada una de ellas a partir de las coordenadas del vértice y de las raíces de la función.

Comentarios didácticos del Problema 4

Este problema propone un trabajo con la familia de parábolas del tipo $f(x)=ax^2-5$. En las primeras consignas se propone estudiar la relación entre el valor de a y el gráfico de la función correspondiente. En las consignas **e** y **f** se pone el foco en el trabajo con la resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas.

Para responder a la consigna **a**, los/las estudiantes podrán mover el deslizador y observar que, cuando $a=2$, el punto (2 ; 3) pertenece a la parábola. Sin embargo, en la consigna **b**, no es posible hallar el valor de a con el rango que aparece —por defecto— al crear el deslizador (de −5 a 5). A partir de la exploración, podrían analizar la variación de las gráficas en relación con los valores de a que elijan, ya sea intencionalmente o no, al mover el deslizador. Podrían formular descripciones tales como:

- A medida que a aumenta, las ramas de la parábola se acercan al eje y.
- Cuando a es negativo, la parábola se invierte y sus ramas apuntan hacia la parte negativa.

Esta exploración también les permitirá reconocer que, para que el punto (1 ; 3) pertenezca a la parábola, el valor de *a* debe ser mayor que 5. En esta instancia podrán modificar el rango del deslizador o apelar a la resolución de la ecuación $3=a\cdot 1^2-5$ para determinar que $a=8$.

La consigna **c** busca retomar el análisis de las raíces, esta vez, asociado al valor del parámetro *a*. Para el caso de las raíces 5 y −5, es posible encontrar el valor del parámetro utilizando el deslizador. En este caso, $a=0{,}2$. En cambio, no es posible encontrar del mismo modo el valor de *a* para que las raíces sean 10 y −10 porque, en esta oportunidad, *a* es un número irracional. A través de la exploración con el deslizador, podrían establecer que el valor de *a* debe estar entre 0 y 0,2. Para determinar el valor exacto, deberán plantear y resolver la ecuación $0=a\cdot 10^2-5$ o bien $0=a\cdot(-10)^2-5$.

La consigna **d** tiene el propósito de analizar la ecuación en diálogo con lo que se observa en el gráfico en GeoGebra para un caso particular: cuando $a=0$, el gráfico que se muestra es una recta. En esta oportunidad, no se trata de resolver una ecuación sino de analizar la expresión $f(x)=0\cdot x^2-5$ y reconocer que esta es equivalente a $f(x)=-5$. Es probable que esta equivalencia no sea reconocida de inmediato por el grupo de estudiantes sino que, en el intercambio colectivo, sea el/la docente quien la ponga de manifiesto.

En las consignas **e** y **f** se deja fijo un valor del parámetro *a* con el objetivo de trabajar con la resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas: $-19=-3{,}5\cdot x^2-5$ y $-180=-7\cdot x^2-7$, respectivamente.

Comentarios didácticos del Problema 5

Este problema se propone con el objetivo de sistematizar el trabajo realizado en los problemas anteriores.

En las consignas **a** y **b**, se apunta a que las/los estudiantes puedan plantear y resolver las ecuaciones para hallar el valor o los valores de *x* en cada caso. Si bien algunos estudiantes podrían seguir apoyándose en la exploración de la *Vista Gráfica* y en la anticipación de resultados mediante el uso de GeoGebra, será importante que la/el docente invite a validar las producciones a partir de las resoluciones algebraicas. Además, en el caso de la consigna **b**, es posible argumentar que no existe un valor de *x* para el cual el punto (*x*; −2) pertenezca a la función a partir de analizar la fórmula $f(x)=2x^2+7$. Es decir, observando el término cuadrático, es posible asegurar que cualquiera sea el valor de *x*, el resultado de $2x^2$ será positivo y, al sumarle 7, se seguirá obteniendo un número positivo.

Estas tres formas de interpretar el problema (a partir de la resolución de la ecuación, del análisis del gráfico o del análisis de la fórmula) permiten establecer relaciones entre los diferentes registros y la información que porta cada uno de ellos, cargando de diferentes sentidos la conceptualización del objeto matemático estudiado.

En la consigna **c**, es la primera vez que —en esta secuencia— los/las estudiantes se enfrentan a la tarea de producción de gráficos de funciones cuadráticas en sus carpetas. Para esto, se apunta a que reutilicen lo aprendido en los problemas anteriores, busquen el vértice, las raíces —si existen— y realicen cada gráfico de manera aproximada.

Actividad 2. Problemas de síntesis

Con esta actividad se espera que las/los estudiantes puedan analizar y reflexionar sobre el trabajo realizado a lo largo de esta secuencia.

Actividad 2 Problemas de síntesis

Problema 1

Consideren las distintas funciones cuadráticas que se obtienen al dar valores al parámetro a en la siguiente expresión: $f(x)=ax^2+6$. A continuación, completen la siguiente tabla.

	¿Verdadero o falso?	**Expliquen su respuesta**
Si a es positivo, todas las funciones de la forma $f(x)=ax^2+6$ tienen un máximo en (0 ; 6).		
Si a es negativo, todas las funciones de la forma $f(x)=ax^2+6$ tienen un máximo en (0 ; 6).		
Todas las funciones de la forma $f(x)=ax^2+6$ tienen ordenada al origen en $y=6$.		
Si a es positivo, todas las funciones de la forma $f(x)=ax^2+6$ no tienen raíces.		

Problema 2

Indiquen cuál de los siguientes gráficos es el que representa a la función $f(x)=-3x^2+2$ y expliquen en qué se fijaron para responder.

Gráfico A

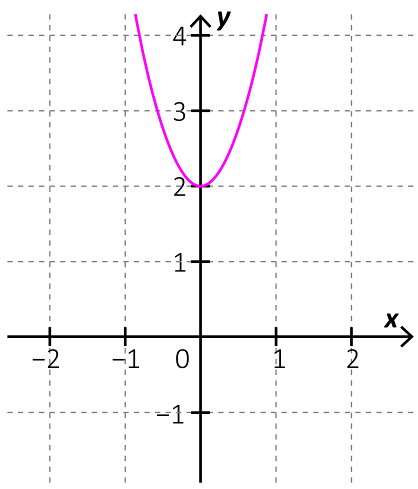


Gráfico B

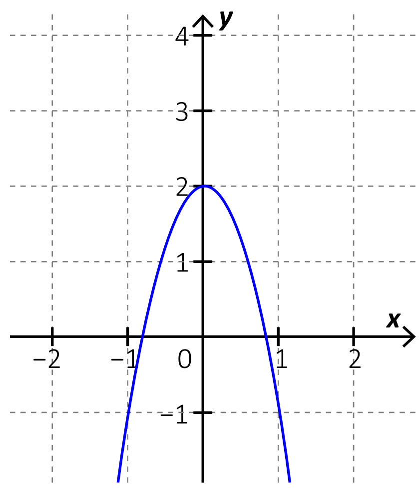
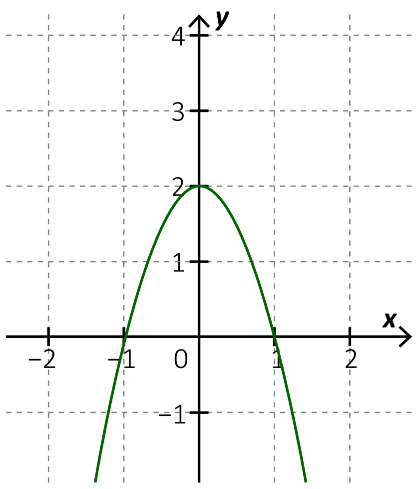


Gráfico C



Comentarios didácticos de la Actividad 2

En esta última actividad se espera que los/las estudiantes puedan analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas resueltos y los aprendizajes logrados. Por otro lado, se espera que sea una oportunidad para que el/la docente evalúe qué ideas se encuentran más afianzadas y sobre cuáles será necesario seguir trabajando. En este sentido, una posible gestión de la clase es que se resuelvan los problemas en pequeños grupos sin intervención docente y luego, en una discusión colectiva, se socialicen y debatan las diferentes ideas y argumentos.

Orientaciones para la evaluación

Como se mencionó en la introducción, este material presenta una posible secuencia didáctica para el trabajo con funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas incompletas mediado por el uso de GeoGebra. Utilizar un programa de álgebra y geometría dinámica permitirá a los/las estudiantes explorar las gráficas de estas funciones y analizar sus respectivas ecuaciones, para avanzar hacia la validación algebraica.

En relación con el uso de GeoGebra, se intenta que profundicen sus conocimientos sobre el programa, al mismo tiempo que resuelven los problemas. En esta secuencia, se intenta promover un desarrollo dialéctico entre la apropiación del programa y la posibilidad de avanzar en el análisis de las funciones cuadráticas incompletas y sus respectivas ecuaciones. Es decir, conocer más sobre el uso de GeoGebra permite planificar y abordar en mejores condiciones el trabajo con las funciones y las ecuaciones en este programa. A su vez, conocer progresivamente más sobre las funciones y las ecuaciones con las que se trabaja permite buscar, elegir y analizar mejor las herramientas que ofrece el programa.

En ese sentido, algunos indicadores de avance en los conocimientos que las/los estudiantes han adquirido, fruto del trabajo con los problemas planteados, pueden ser:

- La progresiva identificación de procedimientos erróneos e incompletos.
- La identificación de procedimientos adecuados y su reutilización y adaptación para la resolución de nuevas situaciones.
- La progresiva apropiación de herramientas matemáticas para la utilización y la interpretación de los diferentes registros de representación, así como el análisis de la información que brinda cada uno de ellos.
- La progresiva apropiación de la necesidad de validar algebraicamente las conjeturas elaboradas —tanto las propias como las de sus compañeros/as— a partir de las exploraciones con los gráficos.
- El avance hacia la incorporación de los diferentes usos de las letras: como variable y como parámetro.
- La formulación de conjeturas que tengan paulatinamente un mayor grado de generalidad, avanzando desde el análisis de casos particulares hasta la elaboración de argumentos que sostienen ciertas generalizaciones.
- El avance en la utilización del programa GeoGebra para realizar las construcciones propuestas, en términos de la selección y el uso de las herramientas.

Anexo

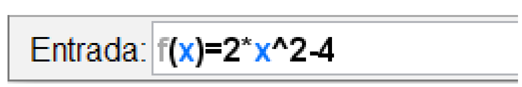
Funciones y ecuaciones con GeoGebra

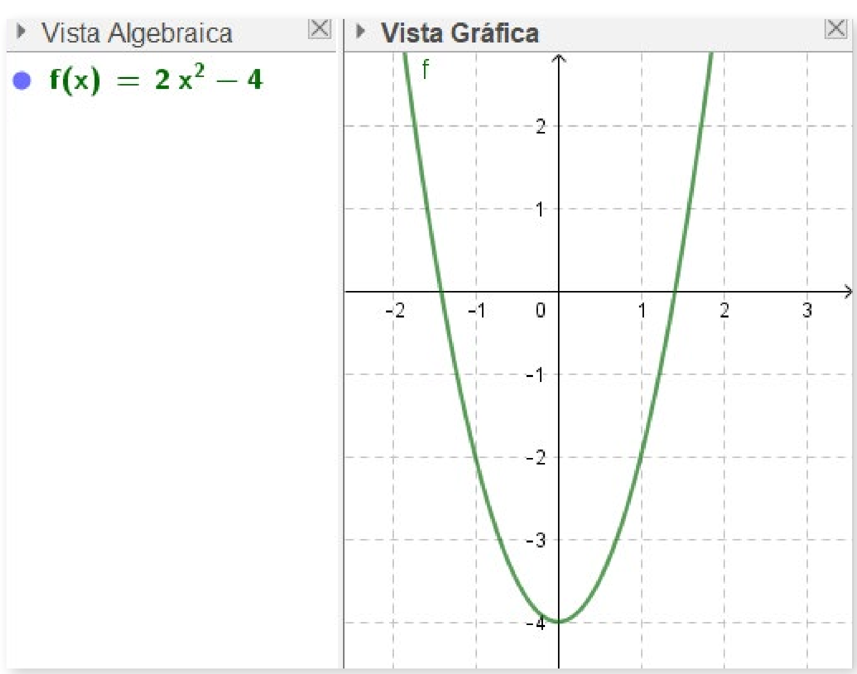
El programa GeoGebra puede descargarse fácilmente y de forma gratuita. Las capturas de pantalla que se muestran a continuación corresponden a la versión GeoGebra Clásico 5.

A continuación se exploran algunas herramientas vinculadas al trabajo con funciones y ecuaciones. La *Vista Algebraica* describe las ecuaciones de los objetos graficados en la *Vista Gráfica*. Estos objetos pueden ser ingresados a través de la barra de *Entrada*.

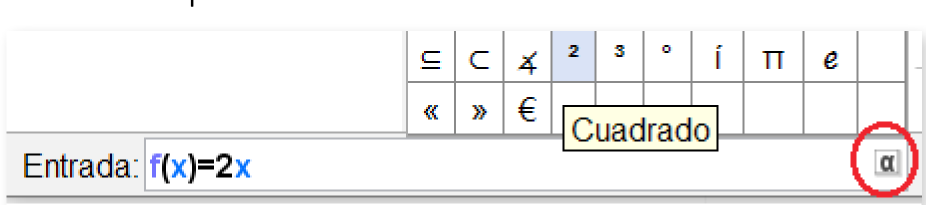
1. Ingresar una función cuadrática a partir de su ecuación

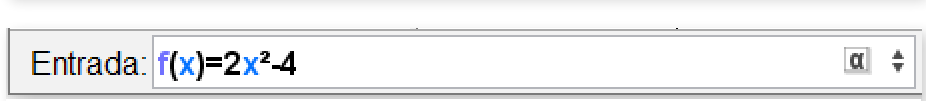
Si se quiere ingresar la ecuación de una función cuadrática, por ejemplo $f(x)=2x^2-4$, se la escribe en la barra de *Entrada* y se presiona *Enter*:





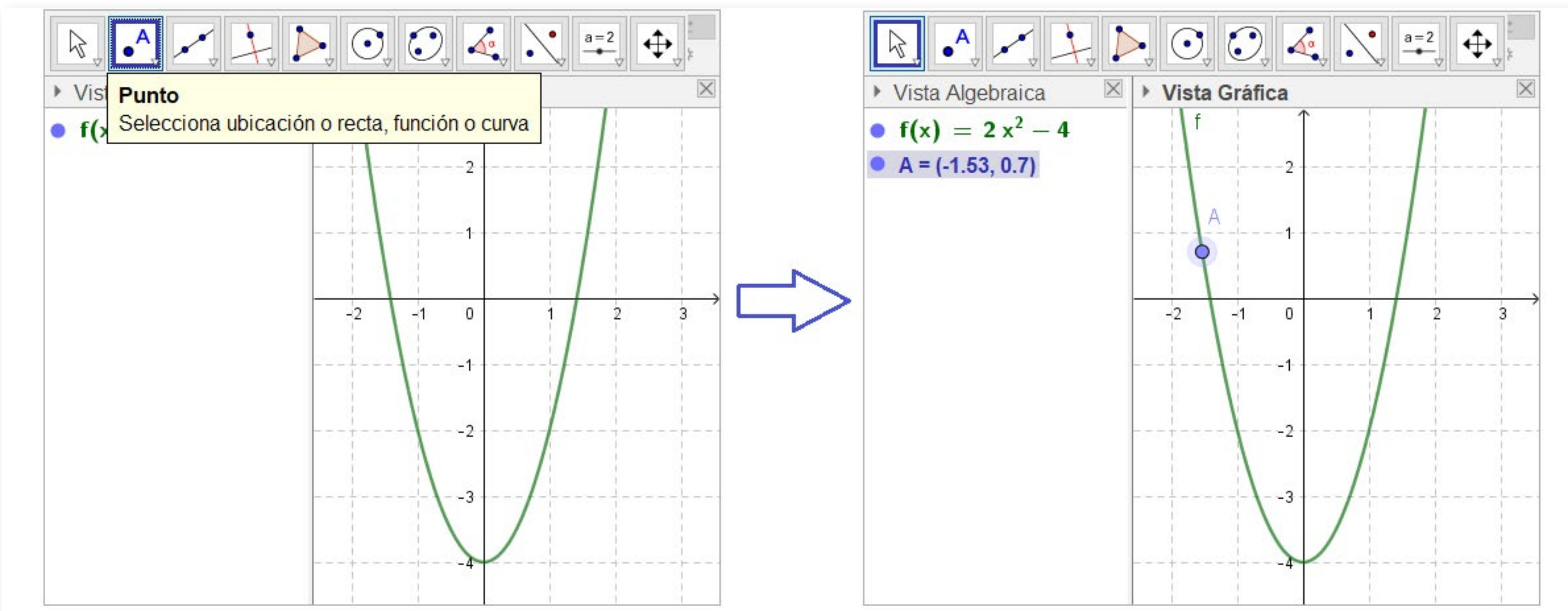
Otra opción para poner el exponente 2 es utilizar el menú de la barra de *Entrada* que se despliega al hacer clic en la letra α que aparece a la derecha de esta barra. También se puede omitir el símbolo * (asterisco) para indicar el producto.





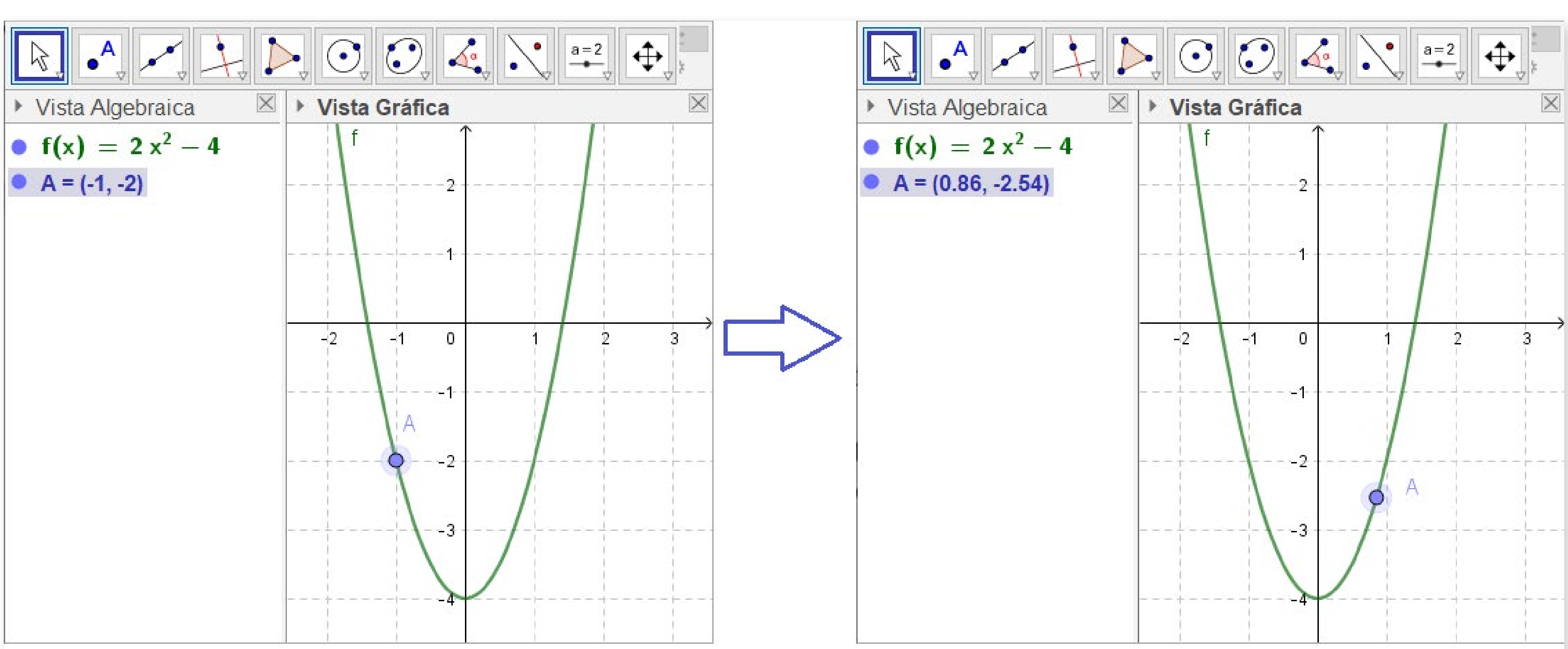
2. Ingresar un punto sobre una función cuadrática

En GeoGebra también es posible ingresar un punto sobre la gráfica de una función cuadrática, de manera tal que el punto marcado solo pueda desplazarse sobre la parábola. Para ello, se elige la herramienta *Punto* del menú de íconos y se hace un clic sobre el objeto *Función*:

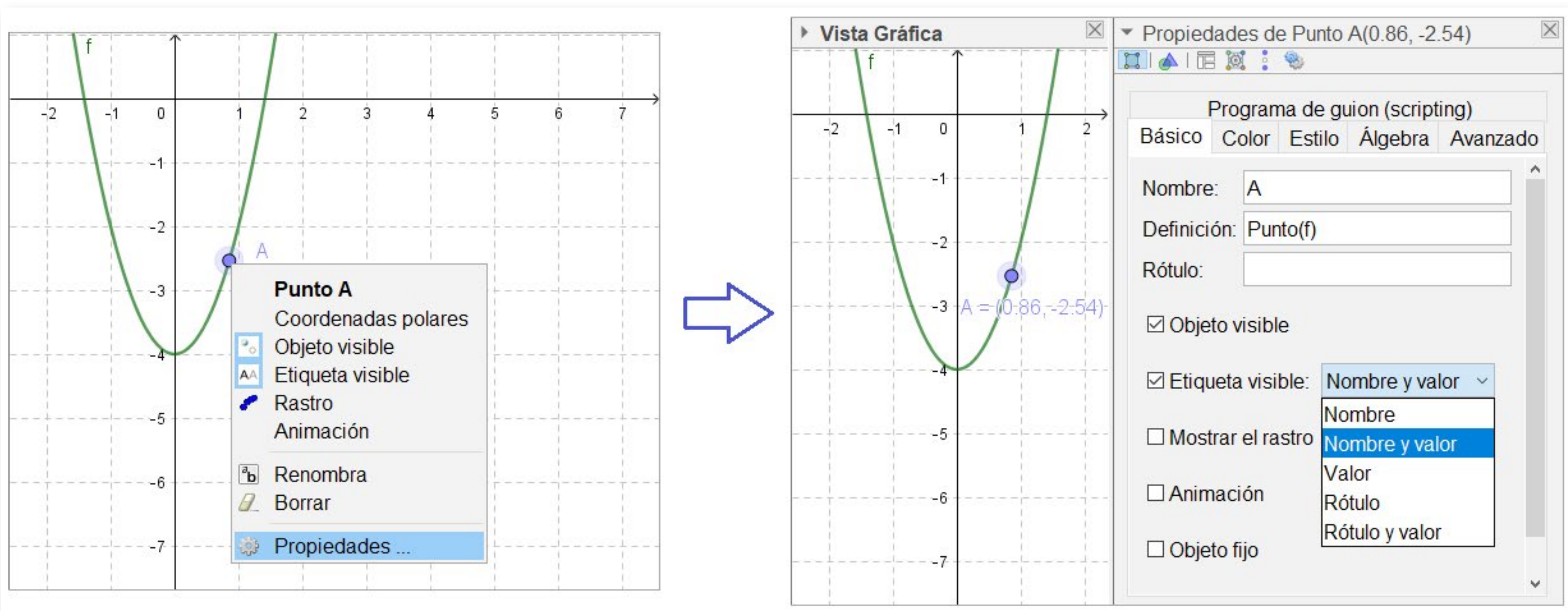


El punto queda construido tanto en la *Vista Algebraica* como en la *Vista Gráfica*. Como se puede observar, las coordenadas del punto se muestran con dos cifras decimales por defecto. Es importante aclarar que el programa opera con números racionales (hasta quince cifras) aunque la gráfica de la parábola se muestre en forma continua.

Si se selecciona *Elige y Mueve* y se realiza un clic izquierdo sobre el punto *A* sin soltarlo, al mover el *mouse*, es posible desplazar sobre la parábola y observar cómo se modifican sus coordenadas en ambas vistas:



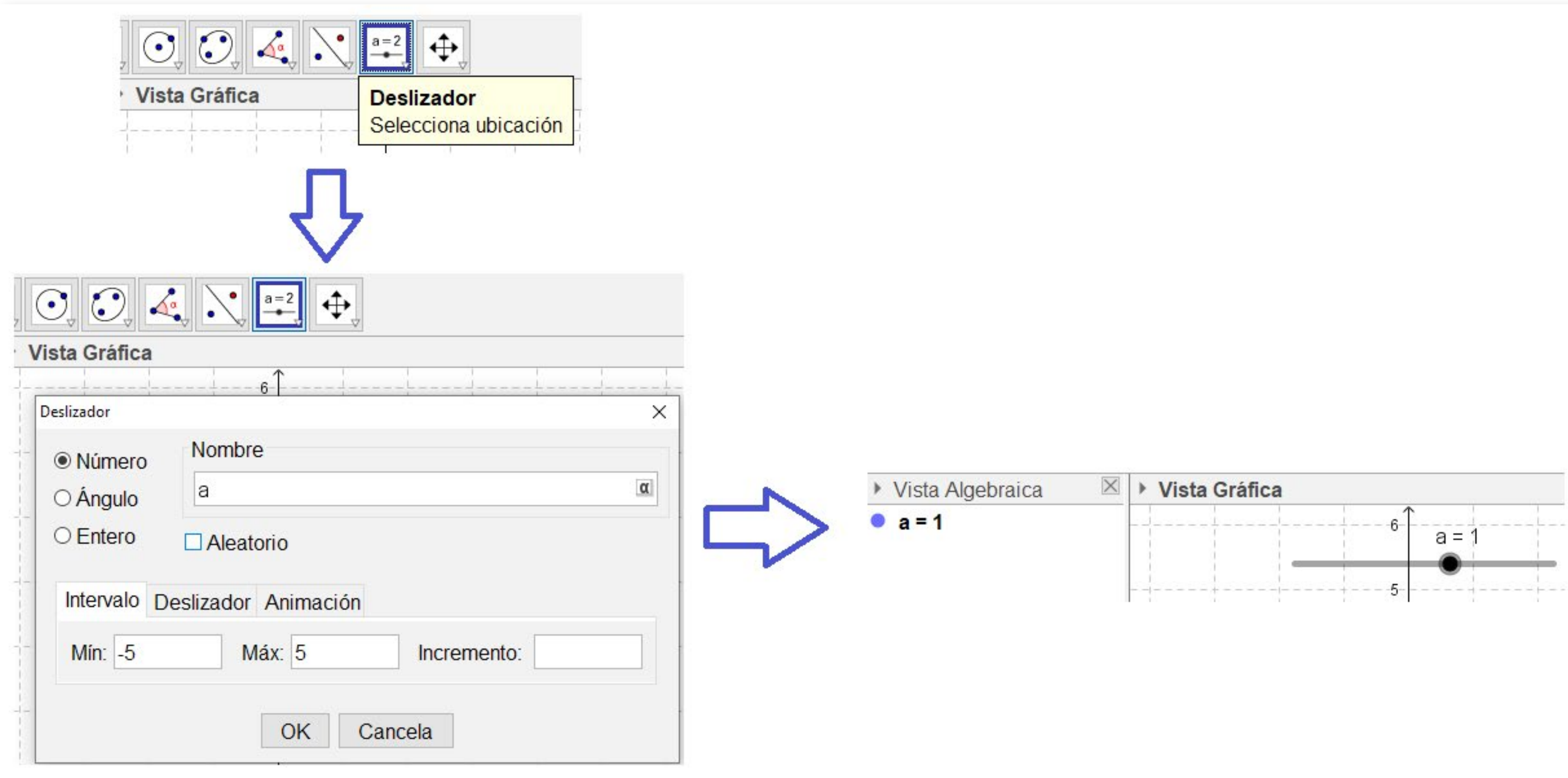
Para observar las coordenadas del punto sobre la parábola en la *Vista Gráfica*, se debe hacer un clic derecho sobre el punto creado, elegir la opción *Propiedades* y así se desplegará una ventana con las propiedades del objeto. En la pestaña *Básico*, se deberá tildar *Etiqueta visible* para elegir del menú desplegable la opción *Nombre y valor*. De esta forma, se podrá observar el punto sobre la parábola con su nombre y sus coordenadas.



3. Definir un deslizador

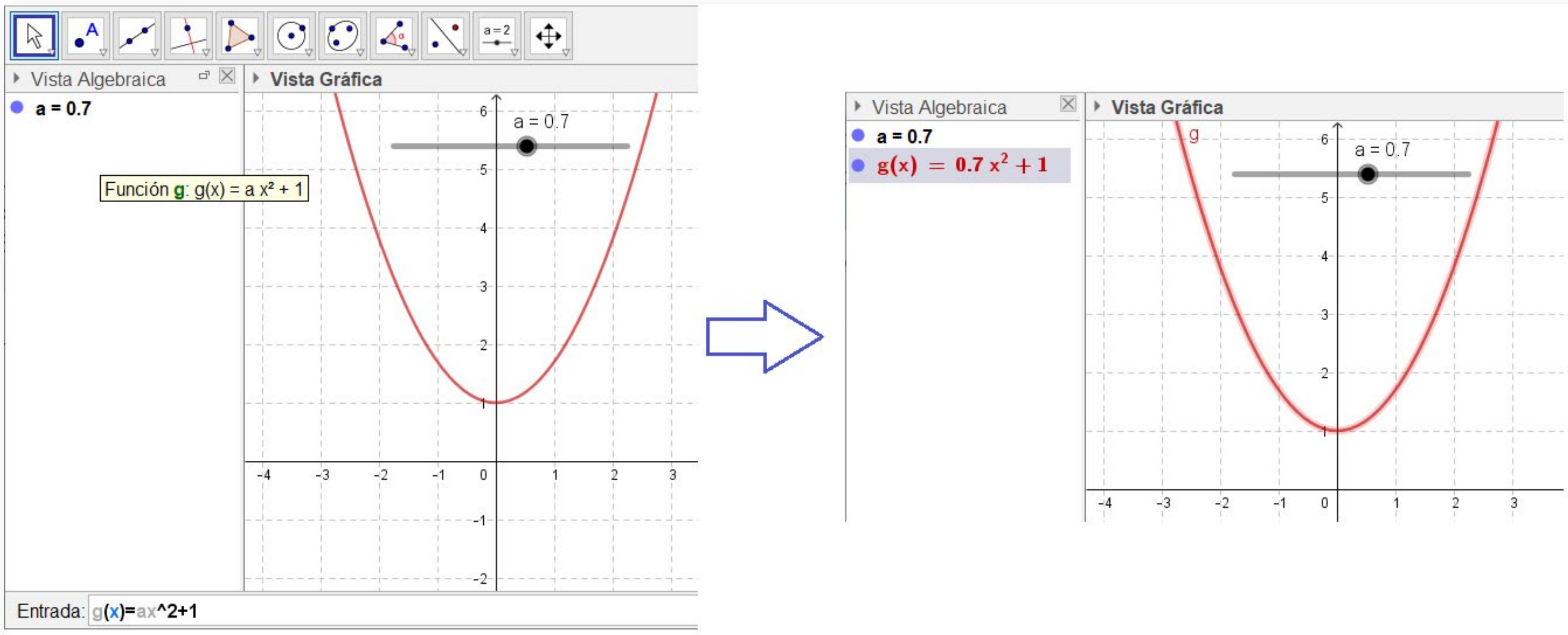
Otra opción que ofrece el programa es definir un *Deslizador*. Esta herramienta es una representación gráfica de un número libre (o de un ángulo). En particular, se definirá al deslizador como un número con el propósito de trabajarlo como un parámetro en la ecuación de una función cuadrática.

Una vez seleccionada la herramienta *Deslizador* desde el menú de íconos, será necesario hacer un clic en cualquier espacio libre de la *Vista Gráfica*. Aparecerá una ventana de diálogo emergente que permitirá especificar el *Nombre*, *Intervalo [mín, máx]*, e *Incremento* (por defecto es 0.1) del valor correspondiente así como la alineación con que quedará expuesto (*Horizontal* o *Vertical*), entre otras opciones:

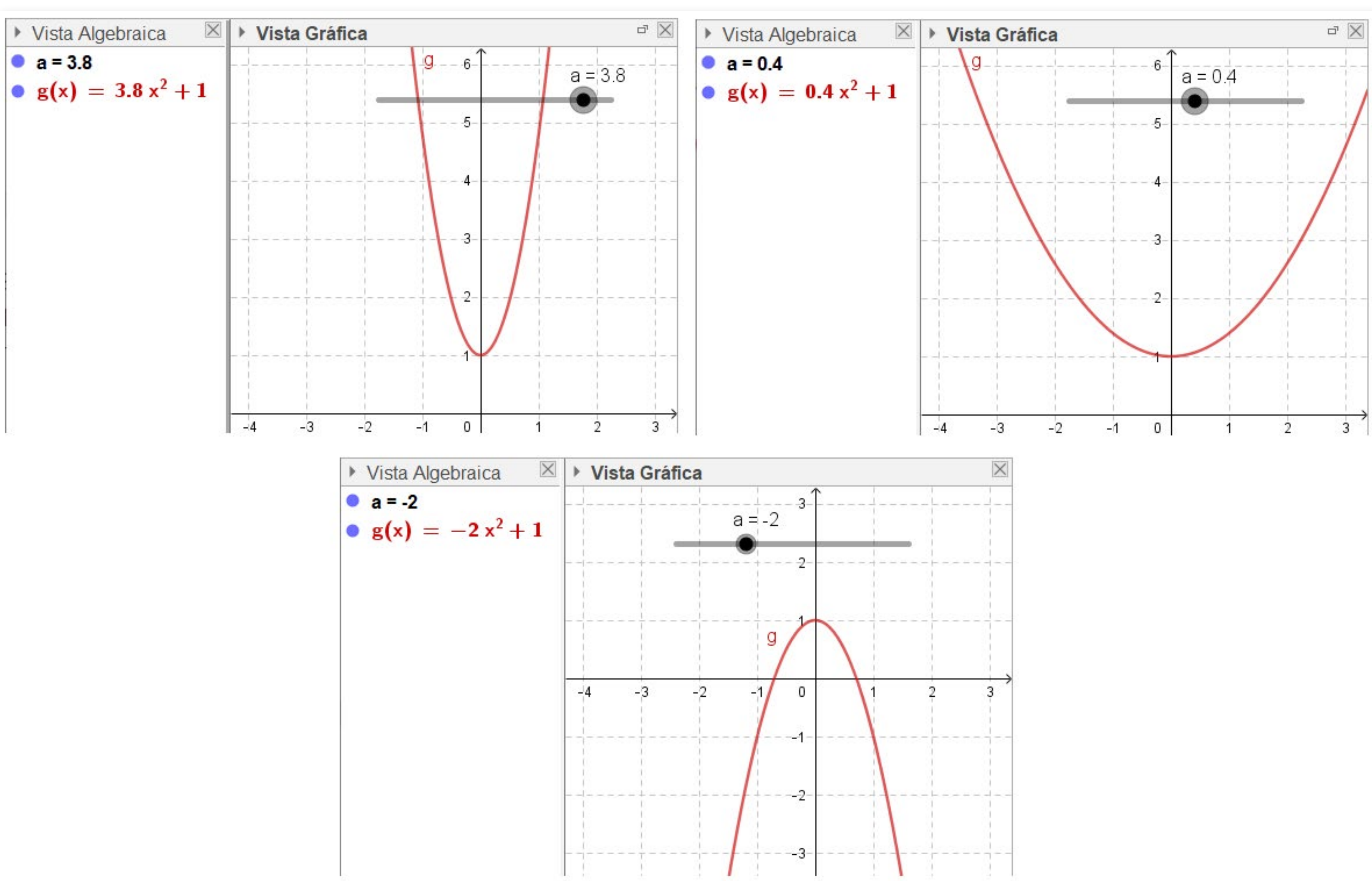


Cuando la herramienta *Elige y Mueve* está activa, se la puede emplear sobre el punto del deslizador que permite moverlo. Así se modifica el valor del *Deslizador* dentro del rango en el que se extiende.

Una vez creado el deslizador, se lo puede utilizar para generar una familia de parábolas cuya concavidad está dada por el valor del deslizador. Por ejemplo, si se ingresa en la barra de *Entrada* la ecuación $g(x)=ax^2+1$, se crea un conjunto de parábolas de coeficiente principal a.

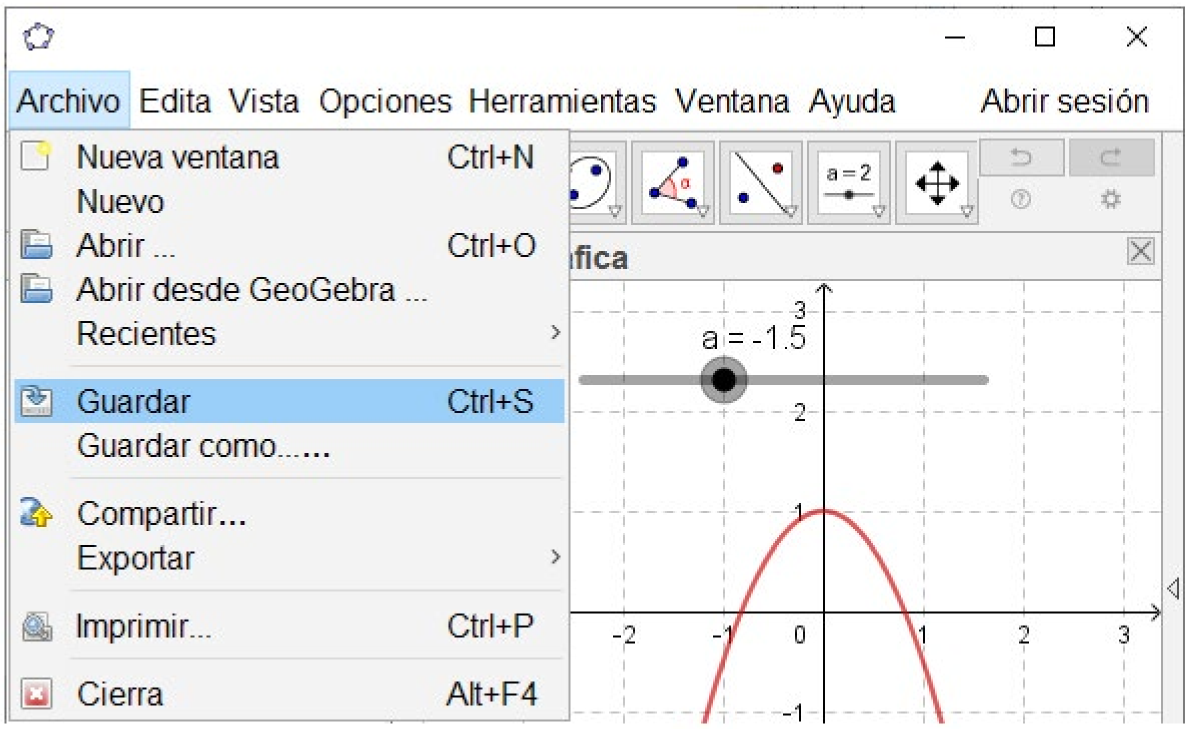


Si se modifica el valor del *Deslizador*, se obtienen diferentes parábolas. Cada una de ellas queda representada por su ecuación y su gráfica para cada valor del *Deslizador* —en este caso, utilizado como parámetro—.



4. Guardar archivos en GeoGebra

Para guardar las construcciones hechas en GeoGebra, se puede acceder al menú *Archivo* y elegir la opción *Guardar*.



Bibliografía

Bibliografía consultada

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2015). *Diseño Curricular para la Nueva Escuela Secundaria. Ciclo Orientado del Bachillerato. Formación General*. CABA: Ministerio de Educación.

Bibliografía recomendada

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. CABA: Ministerio de Educación.

Este material es una propuesta para la enseñanza de función cuadrática y la parábola. Se abordan distintos aspectos de la función cuadrática a partir de la formulación y del análisis de un conjunto de problemas.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2018). *Construcciónes de cuadriláteros con Geogebra*. CABA: Ministerio de Educación e Innovación.

Esta secuencia propone el estudio de problemas sobre la construcción de cuadriláteros, mediados por el uso de GeoGebra.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2018). *Construcción de triángulos con GeoGebra*. CABA: Ministerio de Educación e Innovación.

Esta secuencia propone el estudio de problemas sobre la construcción de triángulos, mediados por el uso de GeoGebra.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2018). *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1*. CABA: Ministerio de Educación e Innovación.

Esta secuencia propone el estudio de problemas sobre la ecuación de la recta, mediados por el uso de GeoGebra.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2018). *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 2*. CABA: Ministerio de Educación e Innovación.

Esta secuencia propone el estudio de problemas sobre la ecuación de la recta, mediados por el uso de GeoGebra. Profundiza el trabajo iniciado en la primera parte de esta secuencia y abona a la construcción de sentido de las nociones relacionadas con el planteo y la resolución de ecuaciones.

Notas

1 Se sugiere la lectura de *Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado* (2014).

2 Pueden consultarse otras propuestas con GeoGebra en *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1* (2018), *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 2* (2018), *Construcción de triángulos con GeoGebra* (2018), *Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra* (2018).

3 Para consultar el uso de esta herramienta, se sugiere la lectura del anexo "Funciones y ecuaciones con GeoGebra", presente en esta secuencia.

4 Siguiendo la denominación habitualmente instalada en las aulas, los puntos que son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola serán llamados, simplemente, "simétricos".

Vamos Buenos Aires